Le plan orienté dans le sens direct.
* Toute symétrie orthogonale transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées.
* La composé de deux symétries orthogonales conserve les mesures des angles orientés.

I-Définitions :

* On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientés.
* On appelle antidéplacement toute isométrie qui transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées.

- un déplacement est la composé de deux symétries orthogonales.
- un antidéplacement est une symétrie orthogonale ou la composé de trois symétries orthogonales.
- l'identité, les rotations et les translations sont des déplacements
-la symétrie orthogonale et la symétrie glissante sont des antidéplacements

Théorème :
Soient A,B, C et D quatre points du plan tel que AB = CD et AB $\neq$ 0 il existe un unique déplacement (respectivement un unique antidéplacement) qui envoie A sur C et B sur D.

II- Déplacement :

Soient A, B,C et D quatre points du plan tel que AB $\neq$ 0 et CD $\neq$ 0 d'images respectives A',B',C' et D' par un déplacement f on a :$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'})\ [2\pi]$
On dit que f est un déplacement d'angle $\theta \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})[2\pi]$

- Si $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors f est une translation
- Si $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors f est une rotation d'angle θ
- f^{-1} est un déplacement d'angle $-\theta$.
- Si f et g deux déplacements d'angles respectifs θ et θ' alors fog est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$.

Composée de deux translations :
La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

Composée de deux rotations :
Composée de deux rotations d'angles θ et θ' est :

- une translation si $\theta + \theta' = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- une rotation si $\theta + \theta' \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Composée d'une rotation et d'une translation :
La composée d'une rotation d'angles $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et d'une translation est une rotation d'angle θ.

Déplacement et nombres complexes :
$(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan.
Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

- f est une translation de vecteur $\vec{u}$si et seulement si il existe un nombre complexe b tel que z'= z + b ou b est l'affixe de $\vec{u}$.
- f est une rotation de centre I et d'angle θ si et seulement si il existe deux nombres complexes a et b tel que z' = az + b ou $a = e^{i\theta}$ ($a \neq 1$) et $z_1 = \dfrac{b}{1-a}$ est l'affixe de I

III- Antidéplacement :

Une isométrie est un antidéplacement si et seulement si elle est la composé d'une symétrie orthogonale et d'une translation.

Théorème :
Soit f une symétrie glissante, il existe un unique vecteur $\vec{u}$ et une droite unique D tel que $f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$
Ou $\vec{u}$ est le vecteur directeur de D.
Cette décomposition s'appelle la forme réduite de f.

Propriété :

Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D

- Pour tout point M du plan d'image M' par f on a : $M * M' \in D$
- Si $M \in D$ alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
- $fof = t_{\overrightarrow{2u}}$.

Antidéplacement et nombres complexes :

$(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan.

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

f est un antidéplacement si et seulement si il existe deux nombres complexes a et b tel que $z' = a\,\bar{z} + b$

ou $|a| = 1$

Si on désigne par O' = f(O) et par O''= f(O') alors on a $Z_{O'} = b$ et $Z_{O''} = a\,\bar{b} + b$

On sait que fof est :

- L'identité du plan si f est une symétrie orthogonale
- Translation si f est une symétrie glissante

D'où

- Si $a\,\bar{b} + b = 0$ alors f est la symétrie orthogonale d'axe $D = \{M(z) \in P \,/\, f(M) = M\}$
- Si $a\,\bar{b} + b \neq 0$ alors f est la symétrie glissante de vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OO''}$

et d'axe Δ passant par $A(\frac{b}{2})$ et de vecteur directeur $\vec{u}$

Composée de deux isométries

ANNEXE

	Translation	Rotation	Symétrie axiale	Symétrie glissée
Translation	Translation	Rotation	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée
Rotation	Rotation	Rotation ou translation	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée
Symétrie axiale	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée	Rotation ou translation	Rotation ou translation
Symétrie glissée	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée	Rotation ou translation	Rotation ou translation

Dans ce tableau, *id* est considérée comme une translation (et non comme une rotation). Les déplacements sont écrits en vert et les antidéplacements en rouge.